Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika

Pismeni ispit iz Euklidske geometrije II, 06.09.2013. (ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte)

1. (40%)(a) Neka je $\triangle ABC$ dati trougao i neka su D i E proizvoljne tačke, redom, na stranicama AB i AC. Produžimo, redom, AB i AC do tačaka G i H tako da vrijedi $A-B-G$, $BG \cong AD$, $A-C-H$ i $CH \cong AE$. Pokazati da je $P_{\triangle ADE} = P_{\triangle CDH}$ i da je $P_{\triangle ACD} = P_{\triangle CGB}$.

(60%)(b) Tri sfere imaju zajedničku tačku P, pri čemu nijedna prava koja sadrži tačku P nije zajednička tangenta za sve tri sfere. Dokazati da te sfere imaju bar još jednu zajedničku tačku. **Mala pomoć**: U rješavanju zadatka možda ćete naći korisno da prvo pokažete da od tri date sfere ne postoje dvije koje se dodiruju... Iz toga možete zaključiti da...

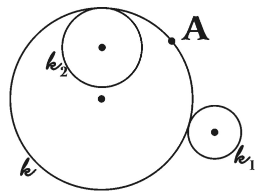
2. (40%)(a) Konstruisati trougao $\triangle ABC$ ako su mu dati visine h_a i h_c i težišna linija t_a.

(60%)(b) Kroz datu tačku konstruisati pravu na kojoj dati krug odsjeca tetivu podudarnu datoj duži.

3. (20%)(a) Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je $x\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{a}$.

(30%)(b) Dvije prave $p(A,D)$ i $p(A,E)$ su povučene iz vrhova A trougla $\triangle ABC$ tako da grade podudarne uglove sa stranicama AB i AC ($\measuredangle BAD \cong \measuredangle EAC$), a stranicu BC sijeku, redom, u tačkama D i E. Ako je poredak $B-D-E-C$ pokazati da je $\dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{BD \cdot BE}{CE \cdot CD}$.

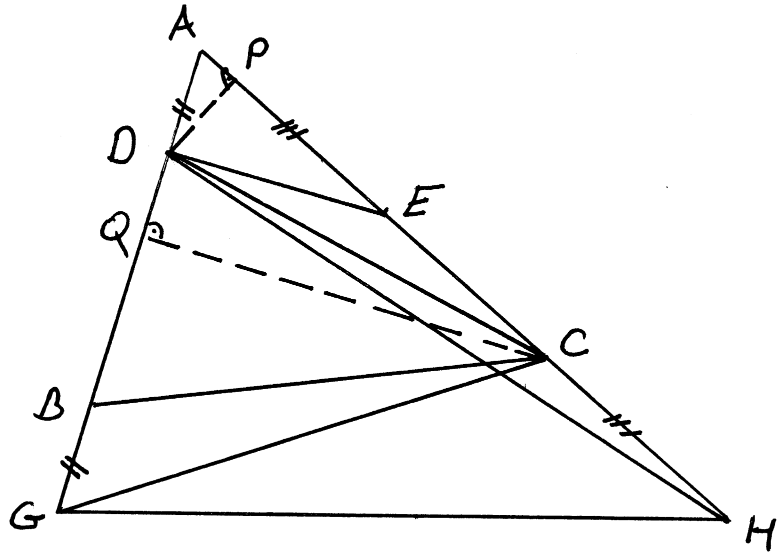
(50%)(c) Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$, ($r_1 < r_2$) i tačka A. Konstrisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A i dodirivati krugove k_1 i k_2 kao na skici. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)



Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Neka je ΔABC dati trougao i neka su D i E proizvoljne tačke, redom, na stranicama AB i AC. Produžimo, redom, AB i AC do tačaka G i H tako da $A-B-G$, $BG \cong AD$, $A-C-H$ i $CH \cong AE$. Pokazati da je $P_{\Delta ADE} = P_{\Delta CDH}$ i da je $P_{\Delta ACD} = P_{\Delta CGB}$.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

Posmatrajmo ΔADE i ΔEDH.
Primjetimo da ova dva trougla imaju istu visinu (koju ćemo označiti sa DP). Sad imamo

$$\left.\begin{array}{l} P_{\Delta ADE} = \dfrac{|DP| \cdot |AE|}{2} \\ P_{\Delta CDH} = \dfrac{|CH| \cdot |DP|}{2} \end{array}\right\} \overset{AE \cong CH}{\Longrightarrow} P_{\Delta ADE} = P_{\Delta CDH}$$

Posmatrajmo trouglove ΔADC i ΔCBG. Ova dva trougla imaju iste visine (označimo je sa CQ).

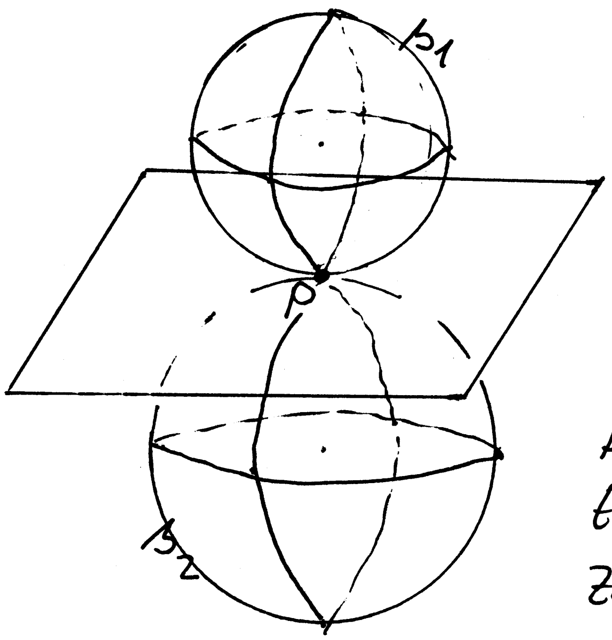
$$\left.\begin{array}{l} P_{\Delta ACD} = \dfrac{|AD| \cdot |CQ|}{2} \\ P_{\Delta CBG} = \dfrac{|BG| \cdot |CQ|}{2} \end{array}\right\} \overset{AD \cong BG}{\Longrightarrow} P_{\Delta ACD} \cong P_{\Delta BCG}$$

q.e.d.

(#) Tri sfere imaju zajedničku tačku P, pri čemu nijedna prava koja sadrži tačku P nije zajednička tangenta za sve tri sfere. Dokazati da te sfere imaju bar još jednu zajedničku tačku.

Rj.

Od tri date sfere ne postoje dvije koje se dodiruju - ovo možemo dokazati kontradikcijom: pretpostavimo da se neke dvije sfere dodiruju, i posmatrajmo njihovu zajedničku tangentnu ravan.



Zajednička tangentna ravan tih dviju sfera onda bi ili (a) • sjekla treću sferu po krugu

ili (b) • bi je dodirivala u tački P.

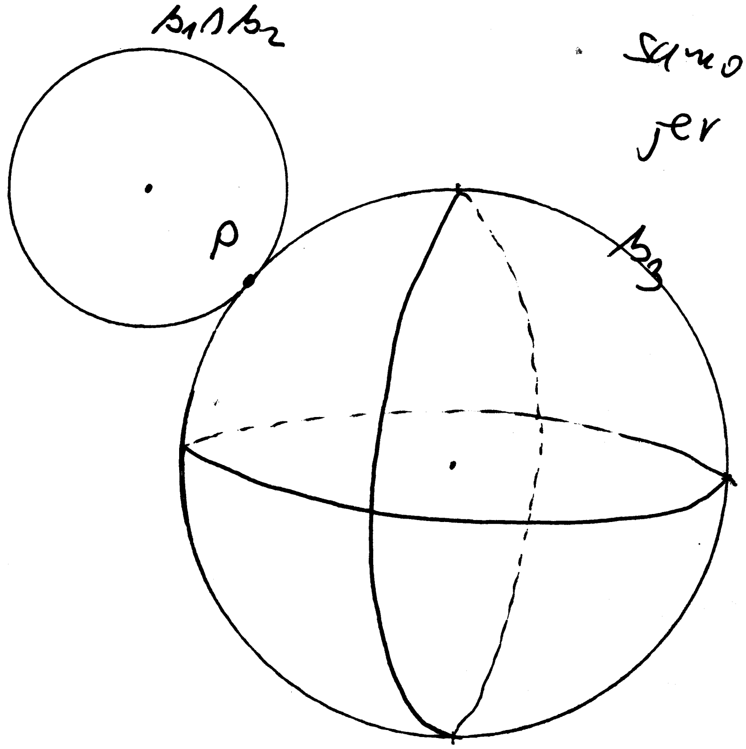
Ako bi presjek bio krug, tangenta tog kruga u tački P bila bi zajednička tangenta sve tri sfere

kontradikcija sa pretpostavkom zadatka

U slučaju da data tangentna ravan dodiruje treću sferu u tački P, tada bilo koja prava koja sadrži tačku P i pripada zajedničkoj tangentnoj ravni bila bi zajednička tangenta sve tri sfere # kontradikcija (sa pretpost. zadatka).

Sad, kako od tri date sfere ne postoje dvije koje se dodiruju, imamo da se dvije date sfere sijeku po

krugu koji sadrži tačku P. Taj krug ne može sa trećom sferom da ima samo jednu zajedničku tačku, jer bi u suprotnom njegova tangenta u tački P (u ravni kojoj pripada) bila zajednička tangenta sve tri sfere
#kontradikcija
(sa pretpost. zadatka).



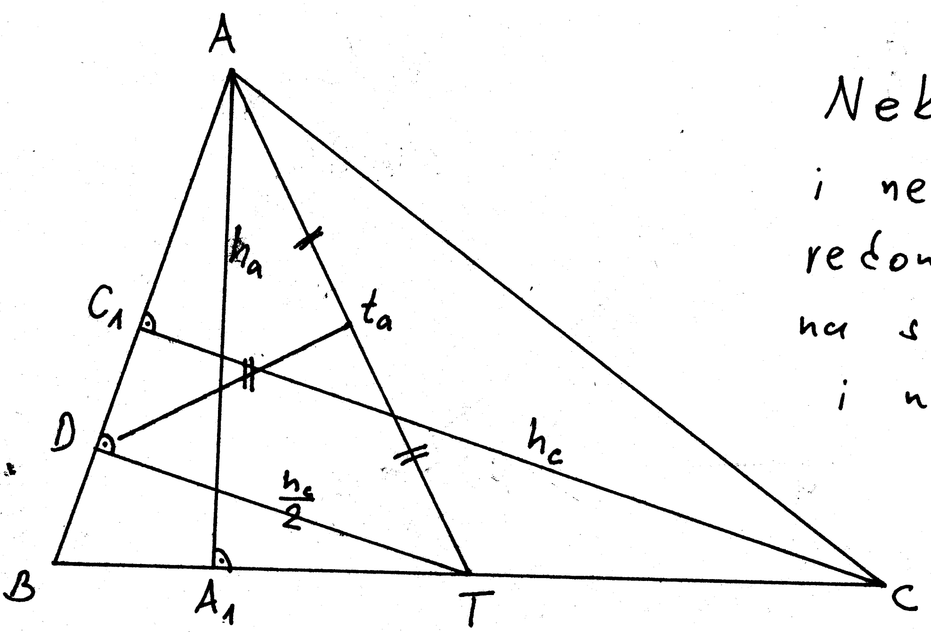
Tačka presjeka tog kruga sa trećom sferom različita od tačke P pripada svim trima sferama, pa dakle, tri date sfere imaju, pored tačke P, bar još jednu zajedničku tačku.

q.e.d.

Konstruisati trougao ΔABC ako su mu dati visine h_a i h_c i težišna linija t_a.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je dat ΔABC, i neka su AA_1 i CC_1 redom visine spuštene na stranicu BC i AB, i neka je T sredina stranice BC.

Označimo sa D sredinu duži BC_1. Primjetimo da je TD srednja linija ΔBCC_1 pa je $TD \perp AB$ i $TD = \frac{h_c}{2}$.

U ΔAA_1T znamo dvije stranice i ugao od $90°$ pa ga možemo konstruisati.

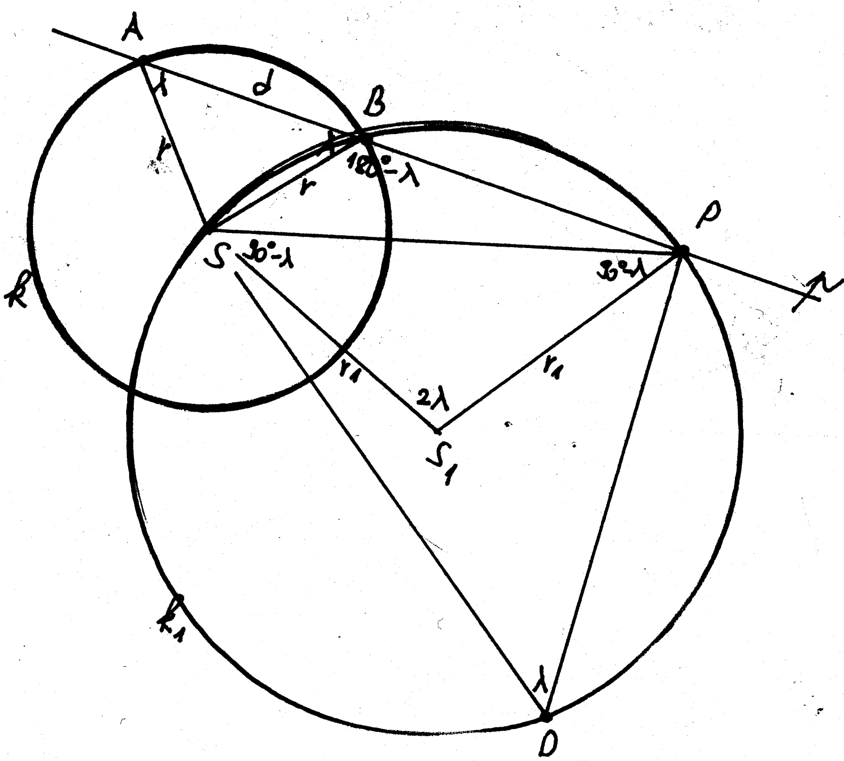
U ΔDTA isto tako znamo dvije stranice i ugao od $90°$ pa ga možemo konstruisati.

Trougao ΔABC možemo konstruisati.

(#) Kroz datu tačku konstruisati pravu na kojoj data kružnica odsjeca tetivu podudarnu datoj duži.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p tražena prava koja prolazi kroz datu tačku P i na datoj kružnici $k(S,r)$ odsjeca tetivu AB podudarnu datoj duži d.

Označimo uglove

$\angle SAB \cong \angle SBA = \lambda$

$\Rightarrow \quad \angle PBS = 180^\circ - \lambda$

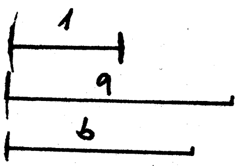
Ako je $k_1(S_1,r_1)$ kružnica opisana oko $\triangle SPB$ tada proizvoljan oštri periferiski ugao nad tetivom SP iznosi λ, centralni ugao nad tetivom SP je $\angle SS_1P = 2\lambda \Rightarrow \angle PSS_1 \cong \angle S_1PS = 90^\circ - \lambda$.

U trouglu $\triangle ASB$ su nam poznate sve tri stranice pa ugao λ možemo konstruisati. Kako je data duž PS to i kružnicu k_1 možemo konstruisati pa dobiti i tačku B. Sad nije teško konstruisati traženu pravu p.

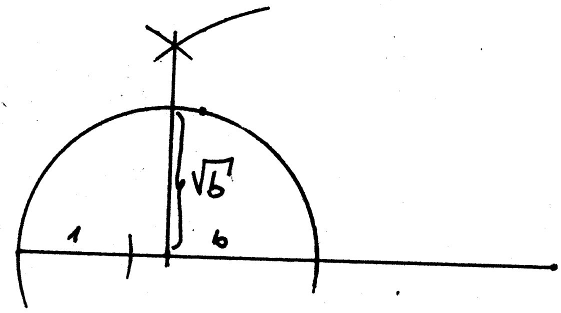
(#) Date su duži a i b. Nacrtati duž x ako je

$$x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{a}.$$

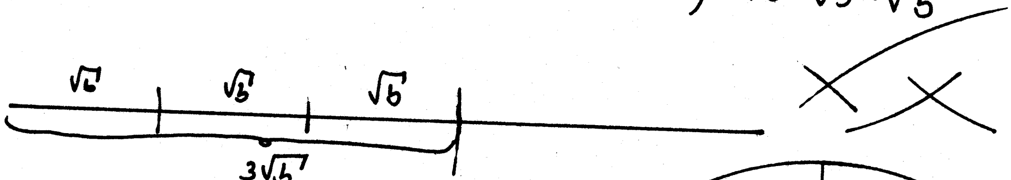
Rj.



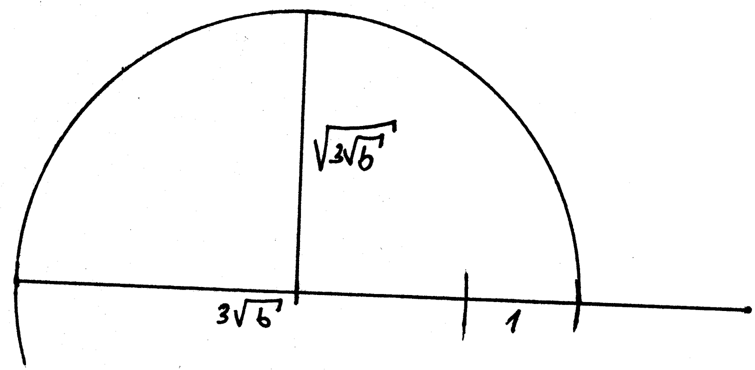
Nacrtajmo duž $\sqrt{b}$.



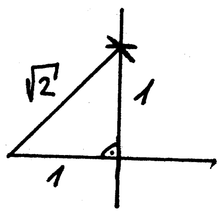
Nacrtajmo duž $3\sqrt{b}$ tj. $\sqrt{b}+\sqrt{b}+\sqrt{b}$



Nacrtajmo duž $\sqrt{3\sqrt{b}}$



Nacrtajmo $\sqrt{2}$



$$x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{a} \quad / \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

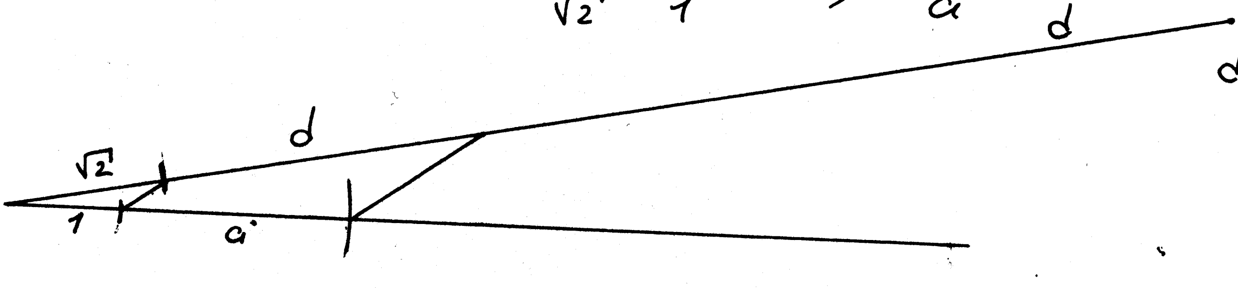
$$x = \frac{\sqrt{3\sqrt{b}}}{\sqrt{2}\,a} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{1}{x}$$

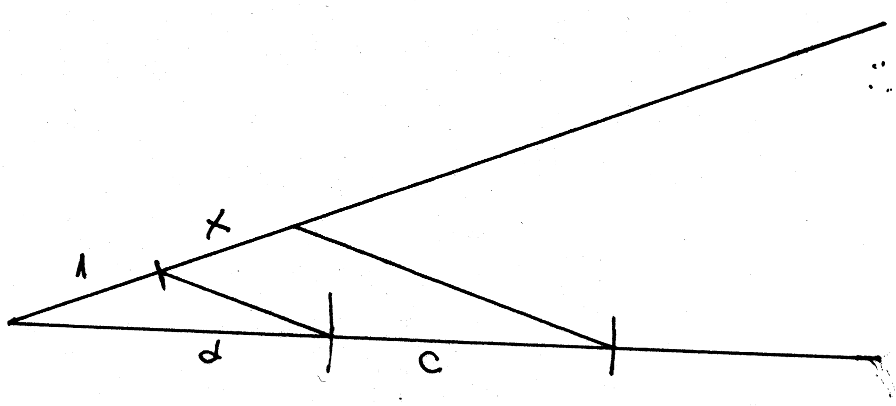
gdje je $c = \sqrt{3\sqrt{b}}$

Nacrtajmo duž $d = a\sqrt{2}$

$$\frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{a}{1} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{2}}{d}$$

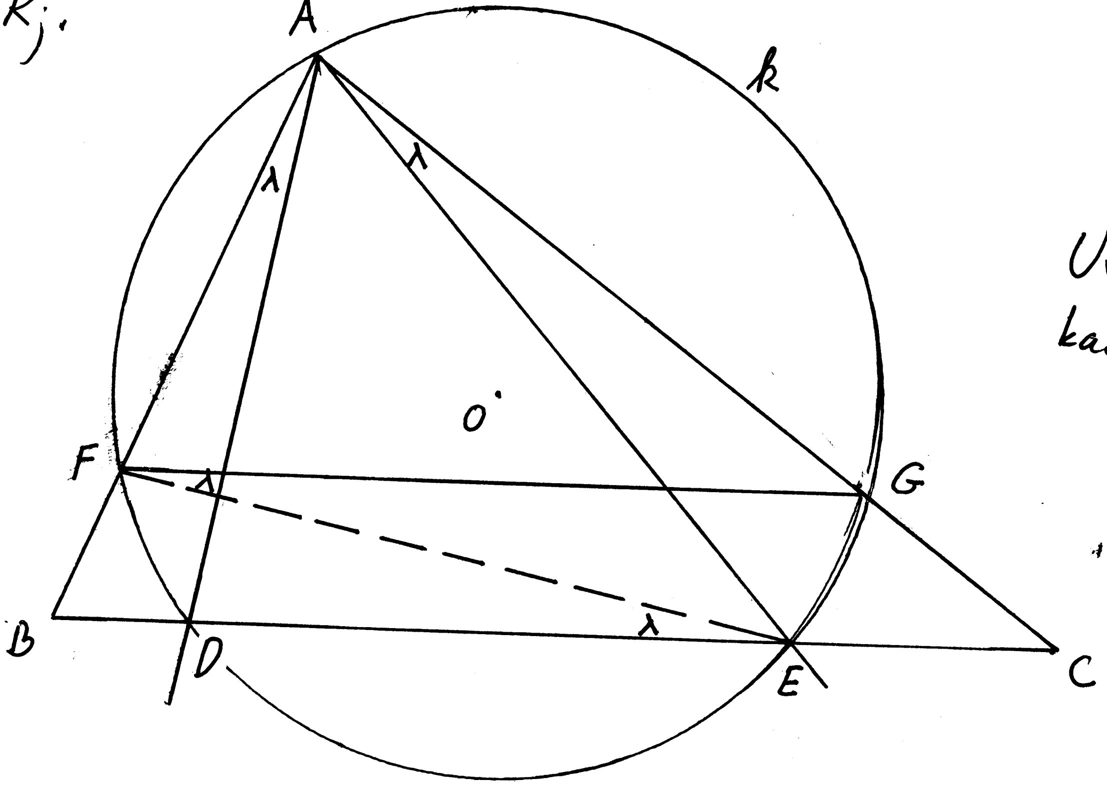
$d = a\sqrt{2}$





(#) Dvije prave $p(A,D)$ i $p(A,E)$ su povučene iz vrha A trougla $\triangle ABC$ tako da grade podudarne uglove sa stranicama AB i AC ($\measuredangle BAD \cong \measuredangle EAC$), a stranicu BC sijeku, redom, u tačkama D i E. Ako je poredak $B-D-E-C$ pokazati da je $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD \cdot BE}{CE \cdot CD}$.

Rj.



Uvedimo oznake kao na slici.

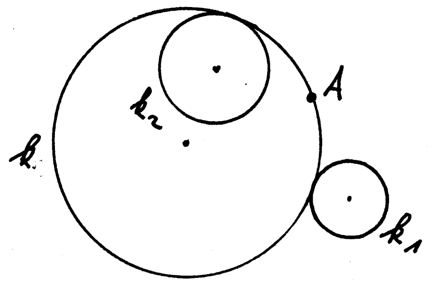
Neka je $k(O,r)$ krug opisan oko $\triangle AED$ i neka su $\{G\} = k \cap AC$ i $\{F\} = k \cap AB$. Primjetimo da je $\square AEDF$ tetivni četverougao $\Rightarrow \measuredangle FAD \cong \measuredangle FED = \lambda$. Isto tako $\square ADEG$ tetivni $\Rightarrow \measuredangle EAG \cong \measuredangle EFG = \lambda$. Kako na pravoj $p(F,E)$ imamo dva podudarna ugla $\Rightarrow p(BC) \parallel p(F,G)$. Iz posljedice Talesove teoreme imamo $\frac{AB}{BF} = \frac{AC}{CG} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CG} \Rightarrow \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CG} \cdot \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BF \cdot AB}{AC \cdot CG} \quad \ldots (*)$$

Prema potenciji tačke $CA \cdot CG = CD \cdot CE$ i $BA \cdot BF = BE \cdot BD$

$$(*) \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BE \cdot BD}{CD \cdot CE}$$ q.e.d.

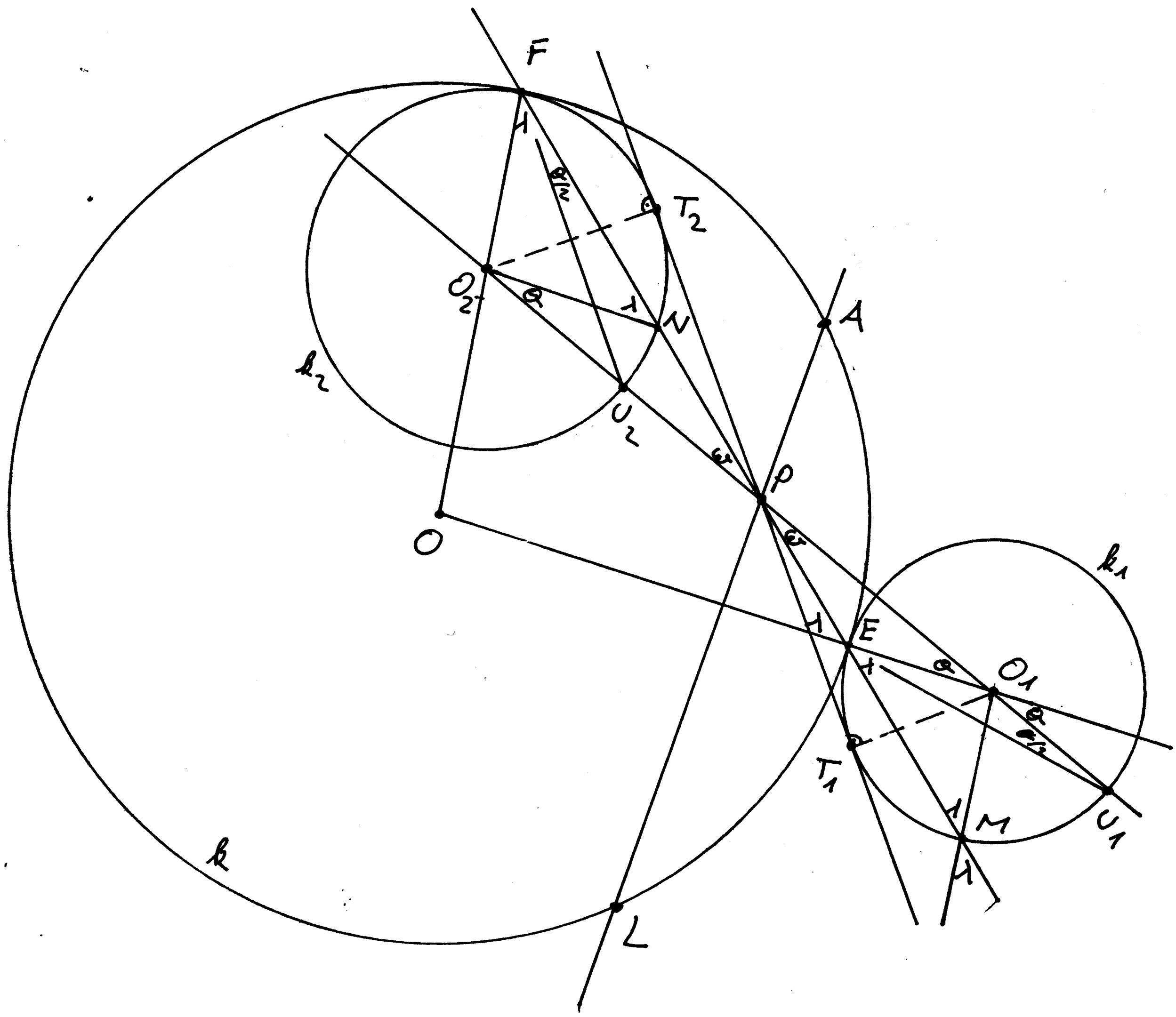
(#) Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ $(r_1 < r_2)$ i tačka A. Konstruisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A i dodirivati krugove k_1 i k_2 kao na sljedećoj skici:



Rj:

__Analiza__

Pretpostavimo da je zadatak rješen.



Neka je $k(O,r)$ traženi krug koji prolazi kroz tačku A i dodiruje date krugove $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$ $(r_1<r_2)$ redom u tačkama E i F. Kako su E i F dodirne tačke krugova primijetimo da imamo sljedeća dva poretka $O-E-O_1$ i $O-O_2-F$.
Neka je $p(E,F)\cap k_2=\{F,N\}$ i $p(E,F)\cap k_1=\{E,M\}$: $F-N-E-M$,

$p(O_1,O_2) \cap k_1 = \{U_1\}$ i $p(O_1, O_2) \cap k_2 = \{U_2\}$: $O_2 - U_2 - O_1 - U_1$,

$\{P\} = p(O_1,O_2) \cap p(E,F)$

(kako O_1, O_2, E i F pripadaju nekim od krugova k_1 i k_2 primjetimo da je poredak $U_2 - P - O_1$ i $N - P - E$.

Trouglovi ΔO_1EM, ΔOEF i ΔO_2FN su jkk. pa imamo

$$\measuredangle O_1EM \cong \measuredangle O_1ME \cong \measuredangle OEF \cong \measuredangle OFN \cong \measuredangle O_2FN \cong \measuredangle O_2NF = \lambda$$

$\Rightarrow p(O,O_1) \parallel p(O_2,N)$ i $p(O_1,M) \parallel p(F,O)$

(imamo podudarne uglove na transferzali $p(E,F)$)).

Označimo sa θ ugao $\measuredangle NO_2U_2$. To je centralni periferijski ugao nad tetivom NU_2. Njemu odgovara periferijski ugao $\measuredangle U_2FN = \frac{\theta}{2}$.

Kako je $p(O_2,N) \parallel p(E,O_1)$ i $p(O_1,O_2)$ njihova transferzala imamo $\measuredangle NO_2U_2 \cong \measuredangle PO_1E = \theta \Rightarrow \measuredangle O_1U_1E = \frac{\theta}{2}$.

Sad možemo pokazati da su ΔFU_2P i ΔU_1EP slični

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle U_1PE \cong \measuredangle FPU_2 = \omega \\ \measuredangle PU_1E \cong \measuredangle PFU_2 = \frac{\theta}{2} \\ \measuredangle U_1EP \cong \measuredangle FU_2P \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{st. UUU}} \Delta PU_1E \sim \Delta PFU_2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{PE}{PU_2} = \frac{PU_1}{PF} \Rightarrow PE \cdot PF = PU_1 \cdot PU_2 \quad \dots(1)$$

Neka je $p(P,A) \cap k = \{A, L\}$.

Možemo primjetiti $PA \cdot PL = PE \cdot PF \quad \dots(2)$

(1) i $(2) \Rightarrow PU_1 \cdot PU_2 = PA \cdot PL \Rightarrow PL = \dfrac{PU_1 \cdot PU_2}{PA}$

Da bi smo konstruisali tačku L potrebno je konstruisati tačku P. Primjetimo $\Delta PO_1E \sim \Delta PO_2N$ i $\Delta PO_1M \sim \Delta PFO_2$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{PO_1}{PO_2} = \dfrac{PE}{PN} = \dfrac{O_1E}{O_2N} = \dfrac{r_1}{r_2} \\ \dfrac{PO_1}{PO_2} = \dfrac{PM}{PL} = \dfrac{O_1M}{O_2F} = \dfrac{r_1}{r_2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

P je centar homotetije koja kružnicu k_1 preslikava u k_2 sa koeficijentom $\frac{r_1}{r_2}$

Neka je $p(P,T_1)$ tangenta na kružnicu k_1. Kako je P centar homotetije $p(P,T_2)$ je tangenta i na kružnicu k_2. Sad tačku P možemo konstruisati, pa time i tačku L. Imamo tačke A, L i kružnicu k_1 pa smo ovaj problem sveli na 3. Apolonijev problem.